Université Claude-Bernard Lyon 1

L1 - UE TMB

Fiche TD n^o 7
Équations différentielles

I. Espace vectoriel des solutions et le Wronskien :

Exercice 1*

Soient f_1 *et* f_2 *deux applications de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *définies par* $f_1(x) = x^2$ *pour* $x \geq 0$ *et* $f_1(x) = 0$ *pour* $x \leq 0$*, et* $f_2(x) = 0$ *pour* $x \geq 0$ *et* $f_2(x) = x^2$ *pour* $x \leq 0$*.*

a) Montrer que $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*.*

b) Montrer que f_1 *et* f_2 *sont linéairement indépendantes.*

c) Montrer que leur Wronskien $W(x)$ *est tout de même nul pour tout* $x \in \mathbb{R}$*.*

d) En déduire qu'il n'y a pas d'équation différentielle dont f_1 *et* f_2 *sont simultanément des solutions.*

Exercice 2(*) *Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle.*

a) Les fonctions sin, cos, sin $\cdot$ cos *sont-elles linéairement indépendantes sur* I *?*

b) Est-il possible que $\sin x$, $\cos x$ *et* $\exp(ix)$ *(où* x *est l'argument dans* I*) fassent partie d'un même système fondamental d'une certaine équation différentielle ?*

Exercice 3 *Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle,* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\varphi \in C^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *tel que la partie réelle* $\mathrm{Re}(\varphi)$ *et la partie imaginaire* $\mathrm{Im}(\varphi)$ *de* φ *sont linéairement independants. Considérons l'espace vectoriel réel* E *de dimension 2 engendré par* $\mathrm{Re}(\varphi)$ *et* $\mathrm{Im}(\varphi)$*, c.-à-d. par définition* $f \in E \Leftrightarrow \exists!\ a, b \in \mathbb{R}$ *t.q.* $f = a\,\mathrm{Re}(\varphi) + b\,\mathrm{Im}(\varphi)$*.*

a) Démontrer que $f \in E \Leftrightarrow \exists!\ A \in \mathbb{C}$ *t.q.* $f = \mathrm{Re}(A\varphi) \equiv \frac{1}{2}\left(A\varphi + \bar{A}\bar{\varphi}\right)$*.*

b) Expliciter les expressions lorsque $\varphi(x) = \exp(\alpha + i\beta)x$*. Démontrer que dans ce cas, on a aussi* $0 \neq f \in E \Leftrightarrow \exists!\ R \in \mathbb{R}_+^*,\ \theta \in [0, 2\pi[$ *t.q.* $f(x) = R\cos(x - \theta)$*.*

Exercice 4* *Soit*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

une équation différentielle définie sur $I \subset \mathbb{R}$*,* p *et* q *étant des applications continues. Montrer explicitement que pour le Wronskien* W *de deux solutions* y_1 *et* y_2 *sur* I *on a*

$$\exists x_0 \in I\,,\ \ W(x_0) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(x) \neq 0 \quad \forall x \in I\,.$$

Indication : *Trouver une équation différentielle du premier ordre satisfaite par* $W(x)$ *et la résoudre.*

II. Équations différentielles du premier ordre

Exercice 5 *Résoudre les équations différentielles suivantes (choisir pour chacune d'entre elles un intervalle adapté au calcul ; trouver la solution génénrale, puis la spécifier grâce aux conditions initiales, si celles-ci sont données) :*

a) $\sin x\, y' = \cos x, \quad y(-\pi/2) = \ln 2$

b) $e^x y' - e^x y = 2x, \quad y(0) = 0$

c) $\cos x\, y' + \sin x\, y = 1, \quad y(0) = 2$

d) $xy' + 2y = \dfrac{1}{1+x^2}$

Exercice 6 *Trouver la solution maximale et spécifier son domaine de définition D_y.*

a) $y' = \cos x \, \cos^2 y, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$

b) $y' = \cos x \, \cos^2 y, \quad y(0) = 0$

c) $y' = \cos x \, \cos^2 y, \quad y(0) = \pi$

d) (*) $\cos y\, y' = \cos x, \quad y(0) = 0$

e) (*) $\cos y\, y' = \cos x, \quad y(0) = \pi$

f) $x\, y' = \cos(\ln x)\, \mathrm{ch}^2 y, \quad y(1) = 0$

Exercice 7(*) *Trouver toutes les solutions maximales avec la condition initiale $y(0) = 0$, et spécifier leurs domaines de définition D_y. Combien de solutions y a-t-il (à une constante près) ?*

a) $(y')^2 = x$

b) $(y')^2 = y$

*c)** $(y')^2 = 1 - y^2$

d) $y\, y' = (3y^2 + 1)$

III. Équations différentielles linéaires du deuxième ordre

Exercice 8 *a) Trouver la solution générale de*

$$y'' - 6y' + 13y = 0\,.$$

En particulier, trouver un système fondamental utilisant la fonction exponentielle.

b) Déterminer la solution maximale qui satisfait $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ à partir du système fondamental obtenu.

c) Déterminer la solution maximale qui satisfait $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

d) Déterminer la solution maximale de

$$y'' - 6y' + 13y = \exp 2x \sin 3x$$

avec la condition initiale $y(0) = 0 = y'(0)$.

e) Déterminer la solution maximale de

$$y'' - 6y' + 13y = \exp 3x \sin 2x$$

avec la condition initiale $y(0) = 0 = y'(0)$.

f) Déterminer la solution maximale de

$$y'' - 6y' + 13y = \exp 2x \sin 3x + 2 \exp 2x \sin 3x$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Exercice 9(*) *Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes :*

a) $y'' + y = cos^2 x$

b) $y'' + 2y' + y = e^x(x^2+1)$

c) $y'' + 3y' + 2y = 2x\,\mathrm{ch}x$

d) $y'' + \cos x\, y' = \dfrac{\sin 2x}{2}$

Exercice 10* *Trouver la solution maximale (qui est unique) dans $C^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ de*

$$(1+i)\,y'' - (5+3i)\,y' + (4+6i)\,y = 0$$

qui satisfait $y(0)=1$ et $y'(0)=0$. Trouver la solution générale de cette équation dans $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 11* *Trouver la solution générale de*

$$2x^2y'' - 2xy' - 30y = 0$$

en en cherchant une de la forme $y(x) = x^\alpha$.

Exercice 12* *Considérons l'équation différentielle suivante :*

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0\,.$$

a) *À l'aide d'une série entière, $y(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$, trouver une solution particulière non nulle y_1 de l'équation. (Utiliser votre liste des séries de Taylor pour identifier la série trouvée avec une fonction élémentaire).*

b) *A l'aide de la méthode de la variation de la constante, $y(x) = c(x)y_1(x)$, trouver la solution générale de l'équation sur $]0,1[$.*

III. Une équation différentielle d'ordre supérieur

Exercice 13 *Trouver la solution de*

$$y'''' + 16y = 4\sin x\cos x$$

avec les conditions initiales $y(0)=1$, $y'(0)=\frac{1}{4}$, $y''(0)=4$, $y'''(0)=-1$.

Indication : *Trouver les racines du polynôme caractéristique est un problème qui revient à trouver les racines quatrièmes d'un nombre complexe relativement simple (cf. fiche 3). Comme système fondamental, il est plutôt raisonnable d'utiliser les fonctions exponentielles complexes, voire même* sh *et* ch *(éventuellement avec arguments complexes)—cf. Ex. 3 ci-dessus. Les conditions initiales donnent un système linéaire, à résoudre de préférence grâce au pivot de Gauss.*