Université Claude-Bernard Lyon 1

L1 - UE TMB

Fiche TD n° 5
Fonctions usuelles

I. Fonctions circulaires et leurs réciproques :

Exercice 1 (Formules de trigonométrie)

a) Déduire des formules de $\cos(2a)$ *et* $\sin(2a)$ *les formules suivantes :*

- $\cos(x) = \dfrac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$
- $\sin(x) = \dfrac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$

b) En posant* $x = (\frac{x+y}{2}) + (\frac{x-y}{2})$*, et de même pour* y*, trouver une formule pour* $\cos(x)+\cos(y)$*.*

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes pour $x \in \mathbb{R}$ *:*

a) $\cos^2(x) = \frac{1}{4}$

b) $\sin^2(x) = \frac{3}{4}$

c) $\cos(x) = \cos(2x)$

d) $\cos(x) = \sin(2x)$

Exercice 3 (*)

a) Exprimer $\cos(3\theta)$ *en fonction de* $\cos(\theta)$*.*

b) En posant $\theta = \arccos(x)$ *pour* $x \in [-1;1]$*, exprimer la fonction* $f\colon [-1;1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \arccos(4x^3-3x)$ *en fonction de* $\arccos(x)$*.*

Exercice 4

a) Soit $x \in]-1;1[$*. En utilisant l'égalité* $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$*, démontrer que*

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(Remarque : on peut obtenir également la formule pour $\arcsin'$ *de cette maniére, et celle pour* $\arctan'$ *en utilisant la formule* $\tan' = 1+\tan^2$*.)*

b) Démontrer que $\arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})$ *vaut* $\frac{\pi}{2}$ *lorsque* $x>0$ *et* $-\frac{\pi}{2}$ *lorsque* $x<0$*.*

c) De même, démontrer que pour tout $x \in [-1;1]$*, on a* $\arcsin(x)+\arccos(x) = \frac{\pi}{2}$*.*

d) Déduire de* $\cos x = \sin(x+\pi/2)$ *que* $\cos x = -\sin(x-\pi/2)$*. Soient* $m_\lambda\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto \lambda x$ *et* $t_a\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto x+a$*. Écrire* $\cos|_{[0,\pi]}$ *comme composée de trois fonctions et en déduire la formule de c) (en utilisant aussi l'exercice 5 de fiche 4).*

Exercice 5

a) Étudier et dessiner le graphe de l'application $F\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x \longmapsto \arccos(\cos(x))$*. Exprimer cette fonction comme une fonction* affine par morceaux*, c'est-à-dire comme une fonction affine sur chacun des intervalles de la forme* $[k\pi;(k+1)\pi]$ *pour* $k\in\mathbb{Z}$*.*

b) Similairement pour $G\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\longmapsto \arcsin(\sin(x))$*.*

Exercice 6 (Dérivation)

Trouver le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \arccos(\sqrt{x})$

b) $g(x) = \arcsin(\cos(x))$

c) $h(x) = \sin(\arccos x)$

d) $i(x) = \ln(\sqrt{\arctan(x)})$

II. Fonctions exponentielles et logarithmes :

Exercice 7
En utilisant l'égalité $e^{a+b} = e^a e^b$*, vraie pour tous les* $a, b \in \mathbb{R}$*, démontrer que* $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ $\forall a \in \mathbb{R}$*, et que* $\ln(\alpha\beta) = \ln(\alpha) + \ln(\beta)$ *et* $\ln(\frac{\alpha}{\beta}) = \ln(\alpha) - ln(\beta)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8
Rappelons que par définition, $\alpha^b = e^{b\ln(\alpha)}$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall b \in \mathbb{R}$. *Démontrer que cette équation est* équivalente *à* $(e^a)^b = e^{ab}$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Démontrer que l'on peut en déduire $\alpha^{bc} = (\alpha^b)^c$, $\alpha^{b+c} = \alpha^b \alpha^c$, $\alpha^{-b} = \frac{1}{\alpha^b}$, $\sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}}$ *et* $\ln(\alpha^b) = b\ln(\alpha)$ $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $b, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 (*)
Résoudre les équations et systèmes d'équation suivants :

a) $ln(\frac{1+x}{x}) = ln(2x) - ln(3)$

b) $\begin{cases} x + y = 55 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(700) \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 2^{-x} \\ \ln(-y) - \ln(2) = 1 \end{cases}$

Exercice 10
Démontrer que $\ln(\sqrt{x^2+1} + x) + \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = 0$.

Exercice 11
Résoudre $\ln(|x+1|) - \ln(|2x+1|) \leq \ln(2)$.

III. Fonctions hyperboliques et leurs réciproques :

Exercice 12 (Formules de trigonométrie)

a) Démontrer que $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$.
(Remarque : on peut démontrer des formules similaires à celles sur les fonctions circulaires, à quelques signes près.)

b) Démontrer que $(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x))^n = \mathrm{ch}(nx) + \mathrm{sh}(nx)$.

c) Démontrer que $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$*, et en déduire les dérivées de* argch *et* argsh. *Comment calculer la dérivée de argth ?*

Exercice 13
Posons $X = \mathrm{argch}(x)$ *pour* $x \in [1, \infty[$ *fixé.*

a) En écrivant $x = \mathrm{ch}(X)$*, trouver une équation polynômiale du second degré satisfaite par* e^X *(n'oublions pas que* x *est fixé, et est donc considéré comme une constante).*

b) En déduire une expression de $\mathrm{argch}(x)$ *en utilisant la fonction ln.*

c) (*) Trouver des expressions similaires pour $\mathrm{argsh}(x)$ *et* $argth(x)$.

Exercice 14
Soit $G\colon]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \operatorname{argsh}(\tan(t))$. *Démontrer que pour tout* $t \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, *on a* $G'(t) = \operatorname{ch}(G(t))$.

Exercice 15
Soit f *la fonction définie par* $f(x) = \operatorname{argsh}(x) + \operatorname{argch}(x)$.

a) Étudier la fonction f.

b) En déduire le nombre de solutions de l'équation $\operatorname{argsh}(x)+\operatorname{argch}(x) = 1$, *puis la résoudre.*

IV. Développements de Taylor :

Soit $S_n(f(x))$ le polynôme de Taylor de f à l'ordre n en 0 et $T_f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(f(x))$ toute la série (lorsqu'ils existent).

Exercice 16

a) Calculer $S_3(\tan(x))$.

b) Calculer $S_4(\ln(\cos(x)))$.

c) Vérifier que $-\ln(\cos(x))$ *est une primitive de* $\tan(x)$. *Cela correspond-il à leurs polynômes de Taylor d'ordre 4 et 3 respectivement ?*

Exercice 17
Calculer $S_3((e^x)^\alpha)$ *en utilisant la formule de* $S_n((1+x)^\alpha)$. *Vérifier que cela correspond à* $S_3(e^{\alpha x})$.

Exercice 18
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on a* $S_n(\frac{1}{(\frac{1}{1-x})}) = 1-x$ *en utilisant les formules de* $S_n(\frac{1}{1-x})$ *et* $S_n(\frac{1}{1+x})$.

Exercice 19
Calculer $S_3(\frac{1}{\cos(x)})$, $S_2((\cos(x))^\alpha)$, *et* $S_4(\ln(\operatorname{ch}(x)))$.

Exercice 20
Déterminer $T_{\exp}$, $T_{\sin}$ *et* $T_{\cos}$ *en utilisant la définition d'une telle série. Vérifier* $(T_{\exp})' = T_{\exp}$, $(T_{\sin})' = T_{\cos}$ *et* $(T_{\cos})' = -T_{\sin}$.
De même pour quelques autres fonctions élémentaires dans la liste distribuée.

Exercice 21

1) Comparer les séries de Taylor des fonctions suivantes (pour $z \in \mathbb{C}$*) :*

a) e^{iz} *et* $\cos(z) + i\sin(z)$

b) $\operatorname{ch}(iz)$ *et* $\cos(z)$

c) $\operatorname{sh}(iz)$ *et* $\sin(z)$

2) Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{ch}(z)^2 - \operatorname{sh}(z)^2 = 1$. *En déduire que pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$.