Université Claude-Bernard Lyon 1

L1 - UE TMB

Fiche TD n° 1
Algèbre linéaire et géométrie de base

Exercice 1

On considère 4 points A, B, C, D dans $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées sont

$$A(-1,6,3), \quad B(3,0,-1), \quad C(3,-1,0), \quad D(6,7,3).$$

1. *Déterminer l'équation paramétrique du plan P qui contient les 3 points A,B,C. Déterminer l'équation de ce plan P sous la forme*
$$\vec{r} \cdot \vec{n} = a,$$
où $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ et $a \in \mathbb{R}$.
2. *Montrer que le point $Q(8,5,5)$ est à la même distance des 3 points A, B, C.*
3. *Soit L la droite qui passe par le point Q est qui est orthogonale au plan P. Trouver l'équation paramétrique de la droite L sous la forme*
$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}.$$
4. *Déterminer le point M sur la droite L tel que la distance DM est égale à la distance AM.*
5. *Vérifier que le point M est à la même distance des 4 points A, B, C, D et que cette distance est égale à 5.*

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}^2$. Comme on a vu dans le cours, tout element $\vec{v}$ de E peut s'écrire sous la forme $v = \sum_{i=1}^{2} v_i \vec{e}_i$, où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. *Démontrer que $\vec{v}$ peut être décomposé de manière unique comme combinaison linéaire des deux vecteurs*
$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Déterminer les coefficients correspondants dans la décomposition $\vec{v} = \sum_{i=1}^{2} \tilde{v}_i \vec{f_i}$ (c.-à.-d. trouver $\tilde{v}_i, i = 1, 2$ en fonction de v_1 et v_2).
2. *Montrer que le déterminant de la matrice 2×2 formée par les vecteurs f_1, f_2,*
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
est non nul.
3. *On remplace f_2 par le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Montrer qu'un vecteur arbitraire n'admet pas forcément de décomposition, et que le déterminant de matrice M (construite avec le nouveau f_2) vaut zéro.*

Exercice 3
On considère les ensembles

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = A \times A \times A, \quad C = \{-1, 0, 1\}$$

.

1. *Combien d'éléments contient l'ensemble B ?*
2. *On voit ε_{ijk} comme une application $\varepsilon(i, j, k)$ de B dans C. Donner ses composantes non nulles. Vérifier que ε_{ijk} est totalement antisymétrique et invariant par rapport aux permutations cycliques de (i, j, k).*
3. * *Montrer que*
$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl},$$
où $\delta_{st} = \begin{cases} 1, \text{ si } s = t \\ 0, \text{ si } s \neq t \end{cases}$ *est le symbole delta de Kronecker.*
4. *Démontrer que*
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$
Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ des vecteurs tels que l'expression $V = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ est positive. En utilisant les formules géométriques du produit scalaire et du produit vectoriel, trouver l'interprétation de V en termes de volume. Cela donne une preuve alternative de l'assertion.
Montrer finalement que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ est égal au déterminant de la matrice 3×3 $M = (u, v, w)$.
5. *Montrer que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{c} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a}$. Est-il vrai que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{c} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a})$?*
6. *A l'aide du résultat de 3., exprimer $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d})$ en n'utilisant que des produits scalaires.*
7. *En utilisant le résultat de 3., montrer l'identité de Lagrange*
$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) .$$
8. *Démontrer l'identité de Jacobi, formulée dans le cours.*

Exercice 4
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

1. *Vérifier que $A \cdot B \neq B \cdot A$.*
2. *Vérifier par le calcul que $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$. Est-ce la même chose que $\det(A) \cdot \det(B)$?*
3. *Vérifier que $\det(A) = \det(A^T)$.*

Exercice 5
On considère les matrices $n \times n$ A, B et $C = AB$.

1. *Montrer que $C^T = B^T A^T$.*
2. *Montrer que $AB \neq BA$ si et seulement si $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.*
3. *Montrer que $AB \neq BA$ si et seulement si $(A - B)(A + B) \neq A^2 - B^2$.*
4. *Soient A et B tels que $AB = BA$. En utilisant le résultat de 2. simplifier $(A - B)^2$.*

Exercice 6

On considére le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$ *où* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer* $\det(A)$ *et trouver* A^{-1}.
2. *Trouver la solution* $\vec{x}$.

Exercice 7

On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *donnée par une matrice* M.

1.* *On suppose que* $M^2 = M$, *et que* $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *sont tels que* $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$. *Trouver les valeurs possibles de* λ. *Montrer que, si de plus* $M = M^T$, *alors deux vecteurs* $\vec{v}_0$ et $\vec{v}_1$ *correspondant respectivement aux valeurs* λ_0 *et* λ_1 $(\lambda_0 \neq \lambda_1)$ *sont forcement orthogonaux l'un à l'autre.*
2. *Démontrer que si* M *est une matrice de rang maximal et* $M^2 = M$, *alors* $M = I$, *où* I *est la matrice identité* 3×3.

On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *donnée par la matrice*

$$M_D = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. *Vérifier que* $M_D^2 = M_D = M_D^T$. *Est-il possible de déterminer* $\det M_D$ *sans le calculer ?*
4. *Déterminer le noyau de cette application,*

$$Ker(M_D) = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3, M_D\vec{v} = 0\}.$$

5. *Déterminer le supplémentaire orthogonal du noyau. Montrer que pour tous les vecteurs dans cet espace orthogonal, il existe un* $\lambda \neq 0$ *t.q.* $M_D\vec{v} = \lambda\vec{v}$.
6. *En déduire que l'application* $\vec{x} \mapsto M_D\vec{x}$ *est une projection orthogonale sur un ensemble* $D \subset \mathbb{R}^3$ *à déterminer.*

On considère maintenant l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ *dans* $\mathbb{R}^3$ *donné par la matrice*

$$M_P = I - M_D.$$

7. *Vérifier que* $M_P^2 = M_P = M_P^T$.
8. *Déterminer le noyau de cette application, et son supplémentaire orthogonal.*
9. *Donner une interprétation géométrique de* M_P *et la comparer avec celle de* M_D *ci-dessus.*

Exercice 8

1. *Trouver l'expression de la matrice* R_φ *d'une rotation d'angle* φ *dans* $\mathbb{R}^2$, *en examinant le résultat de cette rotation appliquée aux vecteurs de la base canonique* $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
2. *Vérifier explicitement que* $(R_\varphi)^{-1} = (R_\varphi)^T = R_{-\varphi}$.

Exercice 9

On considère l'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *donnée par la formule*

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}) + (\vec{x} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}))\cos(\varphi) + (\vec{n} \wedge \vec{x})\sin(\varphi),$$

où $\vec{n}$ *est un vecteur unitaire et* $\varphi \in [0, 2\pi[$. *Comme l'application est linéaire on sait qu'il existe une matrice* $R \equiv R_{\vec{n},\varphi}$ *telle que* $f(\vec{x}) = R\vec{x}$. *(Les indices signifient que la matrice depend de* $\vec{n}$ *et de* φ*).*

1. *Déterminer la composante (i, j) de la matrice R en utilisant les symboles ε de Levi-Civita et δ de Kronecker, rappelés dans l'exercice* **3**. *Puis exprimer $R_{\vec{n},\varphi}$ explicitement sous la forme de matrice.*
2. *Etudier le cas spécial où $\vec{n} = \vec{e}_3$. Comparer avec l'exercice* **8**.
3. *Etant donné un vecteur $\vec{x}$ arbitraire, déterminer sa projection $\vec{x}_{||}$ sur l'axe $\vec{n}$, ainisi que le complément $\vec{x}_\perp = \vec{x} - \vec{x}_{||}$.*
4. *Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs unitaires dans $\mathbb{R}^3$ t.q. $\vec{i} \perp \vec{j}$. On considère le vecteur $\vec{y} = a\vec{i} + b\vec{j}$, $a, b \in \mathbb{R}$ dans le plan formé par ces deux vecteurs. En utilisant l'exercice* **8**, *déterminer le résultat de la rotation de ce vecteur autour de l'axe $\vec{i} \wedge \vec{j}$ et d'angle φ.*
5. * *Combiner toutes les observations pour démontrer que $\vec{f}(\vec{x})$ est la rotation de $\vec{x}$ autour de l'axe $\vec{n}$ et d'angle φ.*
6. *Verifier que $R^{-1}_{\vec{n},\varphi} = R^T_{\vec{n},\varphi} = R_{\vec{n},-\varphi} = R_{-\vec{n},\varphi}$.*

Exercice 10

1. *Montrer la formule suivante :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\left(\angle(\vec{u}, \vec{v})\right).$$

   Indication : utiliser l'invariance du produit scalaire par rapport aux rotations. (On peut utiliser le fait que, pour tout vecteur, il existe une matrice de rotation qui le tourne vers l'axe $\vec{e}_3$).
2. * *Démontrer la formule géométrique pour $a \wedge b$ donnée dans le cours. Indication : utiliser le comportement du produit vectoriel par rapport aux rotations.*