L2 - UE Math IV Algèbre. Khôlles.

Questions de cours

1. Donner la définition d'un espace *vectoriel* quotient.

2. Démontrer le théorème du rang.

3. Donner la définition d'un espace dual. Pourquoi c'est un espace vectoriel?

4. Donner la définition d'une base duale. Donner un exemple.

5. Donner la définition d'une base antéduale. Donner un exemple.

6. Donner la définition d'une application transposée. Qu'est-ce qu'on peut dire sur sa matrice?

7. Qu'est-ce qu'on peut dire sur le rapport de l'espace vectoriel et son bidual?

8. Qu'est-ce qu'on peut dire sur le lien entre les formes bilinéaires et ses matrices associées?

9. Comment la matrice de la forme bilinéaire transforme-t-elle si on change la base (les bases). Donner l'idée de démostration.

10. Donner la définition du rang de la forme bilinéaire. Donner un exemple.

11. Montrer que si la forme bilinéaire $E \times F \to \mathbb{R}$ est non-dégénérée et E et F sont les espaces vectoriels de dimension finie, alors $dimE = dimF$.

12. Donner la définition du noyau de la forme bilinéaire. Donner un exemple.

13. Qu'est-ce qu'on peut dire sur le lien entre les formes bilinéaires symétriques et les formes quadratiques?

Exercices.

1. Déterminer l'espace quotient $\mathbb{R}^3/kerA$, où l'application A est donnée par la matrice

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

En déduire l'interprétation géométrique de l'application A.

2. Déterminer l'espace quotient $\mathbb{R}^3/kerA$, où l'application A est donnée par la matrice

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En déduire l'interprétation géométrique de l'application A.

3. Déterminer l'espace quotient $\mathbb{R}^3/kerA$, où l'application A est donnée par la matrice

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En déduire l'interprétation géométrique de l'application A.

4. Déterminer l'espace quotient $\mathbb{R}^3/kerA$, où l'application A est donnée par la matrice

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

En déduire l'interprétation géométrique de l'application A.

5. Sur l'espace vectoriel E des polynômes de degré $\leq n$ on définit l'application

$$\varphi : P(x) \mapsto P'(x)$$

a). Ecrire la matrice de φ dans votre base favorite de E.
b). Montrer que $\varphi^{n+1} = 0$.
c). Trouver les valeurs propres de φ et les vecteurs propres correspondents.
d). Déterminer les sous-espaces de E invariant par φ.

6. Sur l'espace vectoriel E des polynômes on définit les applications

$$\varphi : P(x) \mapsto P'(x)$$

$$\psi : P(x) \mapsto x \cdot P(x)$$

Montrer que

$$\varphi\psi^n - \psi^n\varphi = n\psi^{n-1}$$

7. Donner l'exemple d'une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que:
a) $\mathbb{R}^3 \neq Im(\varphi) \oplus Ker(\varphi)$.
b) $\mathbb{R}^3 \neq Im(\varphi) \oplus Ker(\varphi)$, mais φ n'est pas une projection sur son image.

8. Donner la forme polaire, la matrice dans la base canonique, orthogonaliser:
(1175) $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xy + 2xz + 2yz$
(1176) $q(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + z^2 + 2xy + 4xz + 2yz$

9.Donner la forme polaire, la matrice dans la base canonique, orthogonaliser (donner une base orthogonale et la matrice associée) et donner la signature des formes quadratiques suivantes
(1182) $q(x, y, z) = xy + xz + yz$
(1180) $q(x, y, z) = x^2 + 5y^2 - 4z^2 + 2xy - 4xz$