Licence ST - Année 2008/2009- Semestre 2
UE Mathématiques, Math IV Algèbre

Feuille n° 8

Morphismes autoadjoints dans un espace euclidien - Matrices symétriques réelles

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que toute forme quadratique représentée par ${}^tA \cdot A$ est définie positive.

Exercice 2. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ des réels tels que $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$.
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = \xi_i \xi_j$ et soit $B = 2A - \mathrm{Id}$.
Montrer que B est une matrice orthogonale.

Exercice 3. Soit k un entier positif non nul.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable à valeurs propres positives ou nulles. Montrer que tout vecteur propre de M^k est un vecteur propre de M.
2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soient q et q' des formes quadratiques positives sur E et A et A' leur matrice dans une base donnée $\mathcal{B}$. Montrer que si $A^k = A'^k$ alors $q = q'$.

Exercice 4. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie ${}^tA \cdot A = 0$ alors $A = 0$.

Exercice 5. Soit f un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien. Montrer que $\ker(f - \mathrm{Id}) = (\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}))^\perp$. En déduire que si $(f - \mathrm{Id})^2 = 0$ alors $f = \mathrm{Id}$

Exercice 6. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer que ses valeurs propres λ_i vérifient

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2.$$

Exercice 7. Soit E un espace euclidien et $f \in \mathrm{End}(E)$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ orthogonale dont l'image par f est une famille orthogonale (et donc une base orthogonale).