Licence ST - Année 2009/2010 - Semestre d'automne
UE Mathématiques, Math IV Algèbre

Feuille n° 7

Morphisme autoadjoint dans un espace euclidien - Matrices symétriques réelles

Exercice 1. Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est symétrique et qu'il existe un entier k, $k \geq 2$, tel que $A^k = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que $A^2 = \mathrm{Id}$.
2. A est-elle nécessairement diagonale ?
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donner l'espace des solutions de l'équation : $A^2 = \mathrm{Id}$.
4. Pour chaque solution trouvée, donner une interprétation géométrique de l'application induite sur le plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Considérons la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on note u l'endomorphsime dont M est la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$. Pourquoi u est-il autoadjoint ? Diagonaliser u dans une base orthonormée.

Faire de même avec

$$N = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien $(E, <,>)$. Soit $q : E \to \mathbb{R}$ définie par : $q(x) =< u(x), x >$.

1. Montrer que q est une forme quadratique en exhibant sa forme polaire b.
2. Montrer l'équivalence entre les deux assertions suivantes :
   (i) Il existe une base orthonormée (pour $<,>$) formée de vecteurs isotropes (pour q).
   (ii) La trace de u est nulle.

   Indication. Pour l'implication (ii)$\Rightarrow$(i), utiliser un théorème du cours pour construire un vecteur isotrope pour q et raisonner par récurrence sur la dimension.

Exercice 4. Étant donné $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que l'endomorphisme ψ_M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\psi_M(A) = ({}^tM)AM + MA({}^tM)$ est diagonalisable. Indication. Montrer que pour toutes matrices A, B, H on a : $< HA, B >=< A, {}^tHB >$ et $< AH, B >=< A, B^tH >$ où $<,>$ est le produit scalaire "canonique" sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Soit E un espace euclidien et u un endomorphisme de E. On dit que u est antisymétrique si pour tous $x, y \in E$, $< u(x), y >= - < x, u(y) >$.

1. Montrer que u est antisymétrique si et s.si l'une des assertions suivantes est vraie
   (i) Pour tout $x \in E$, $< u(x), x >= 0$.
   (ii) Étant donnée une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est antisymétrique.
2. Dorénavant, on suppose u antisymétrique.
   (a) Montrer que les racines du polynôme caractéristique de u sont imaginaires pures. Indication. Considérer la matrice de u dans une base quelconque comme un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, où $n = \dim E$.
   (b) Montrer que u est de rang pair.
   (c) Montrer que u^2 est diagonalisable. Soit λ une valeur propre *non nulle* de u^2 et $E(\lambda)$ l'espace propre associé.
   Montrer qu'il existe une base orthogonale de $E(\lambda)$ de la forme $(e_1, \dots, e_p, u(e_1), \dots, u(e_p))$. Indication. Montrer que si $F = \oplus_{i=1}^q (e_i \oplus u(e_i)) \subset E(\lambda)$ et si l'orthogonal de F est non nul et $e \in F^\perp \setminus \{0\}$ alors $u(e) \perp e$ et $u(e) \in F^\perp$.
   (d) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E pour laquelle la matrice de u est de la forme $\mathrm{Diag}(M_1, \dots, M_d, 0, \dots, 0)$ avec $M_i = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_i \\ \alpha_i & 0 \end{pmatrix}$ et $\alpha_i \in \mathbb{R}_{>0}$.