Licence ST - Année 2009/2010 - Semestre d'automne
UE Mathématiques, Math IV Algèbre

Feuille n° 6

Formes quadratiques et formes bilinéaires antisymétriques.

Note. Ici $\mathbf{k}$ désigne un corps commutatif de caractéristique différente de 2.

Exercice 1. Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel. Si b désigne une forme bilinéaire sur E on note ${}^tb$ l'application de $E \times E$ vers $\mathbf{k}$ définie par ${}^tb(x,y) = b(y,x)$.

1. Vérifier que si b est une forme bilinéaire alors ${}^tb$ l'est aussi.
2. On appelle ${}^tb$ la transposée de b. À votre avis, pourquoi ?
3. Vérifier que l'application de $\mathrm{Bil}(E)$ vers lui-même qui à b associe ${}^tb$ est linéaire bijective.
4. Notons $\mathrm{Bil}_s(E)$ et $\mathrm{Bil}_a(E)$ les formes bilinéaires symétriques et antisymétriques respectivement. Montrer que $\mathrm{Bil}(E) = \mathrm{Bil}_s(E) \oplus \mathrm{Bil}_a(E)$.
5. Notons H l'espace vectoriel des applications de E vers $\mathbf{k}$. Montrer que l'application $\phi : \mathrm{Bil}(E) \to H$ donnée par $\phi(b)(x) = b(x,x)$ est linéaire.
6. Quel est le noyau de ϕ ? En déduire que $\mathrm{Bil}_s(E)$ est isomorphe à l'espace vectoriel $Q(E)$ des formes quadratiques sur E.

Exercice 2. Déterminer la forme polaire, la matrice dans la base canonique, une base orthogonale et la signature pour les formes quadratiques suivantes :
$q(x,y,z) = 4x^2 + 4xy + 4xz + 7y^2 - 10yz + 2z^2$.
$q(x,y,z) = 4x^2 + 12xy - 4xz + 5y^2 + 2yz - 3z^2$.

Exercice 3. Soient a, b, c trois réels et $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calcul $\det(M)$. Pourquoi le résultat était-il prévisible ?
2. Quel est le rang de M en fonction de a, b, c ?

Exercice 4. Soit b la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer une base v_1, v_2, v_3 de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle la matrice de b est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n = 2p$. Soit q une forme quadratique de signature (p, p). Soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de E réduite pour q, i.e. pour laquelle la matrice de q est $\mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$. Construire explicitement une base d'un sous-espace vectoriel $F \subset E$ tel que $\dim(F) = p$ et $F = F^{\perp}$.
On pourra commencer avec $n = 2$ et $n = 4$ pour deviner le résultat.

Exercice 6 (Problème)**.** Soit b une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E. On suppose que pour tous $x, y \in E$, on a l'implication :

$$b(x, y) = 0 \Rightarrow b(y, x) = 0.$$

Le but de l'exercice est de montrer que : b est symétrique ou antisymétrique.

0. Révisions : Soit ω une forme linéaire non nulle sur E. Montrer que le noyau $\ker(\omega)$ est de codimension 1 dans E.
1. Traduire l'hypothèse en termes de $\ker \delta(x)$ et $\ker \gamma(x)$. Montrer qu'on a également $\ker \delta = \ker \gamma$.
2. Soit S un supplémentaire de $\ker b$. Montrer les équivalences suivantes :
   b symétrique $\iff$ $b_{|S}$ symétrique.
   b antisymétrique $\iff$ $b_{|S}$ antisymétrique.
   De plus montrer que $b_{|S}$ est non dégénérée.
3. On suppose dorénavant que b est non dégénérée. Pourquoi peut-on le faire ?
4. En utilisant les question 0 et 1, montrer que pour tout $x \in E$, il existe un scalaire $\lambda_x \in \mathbf{k}$ tel que $\delta(x) = \lambda_x \gamma(x)$.
   De plus montrer que si x est non nul alors λ_x est non nul et uniquement déterminé.
5. Soient maintenant x, y tous deux non nuls dans E. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$. On pourra traiter deux cas. Cas 1 : $y = \nu x$ avec $\nu \in \mathbf{k}$. Cas 2 : x et y non colinéaires.
   Dorénavant on note $\lambda = \lambda_x$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.
6. Montrer que pour tous $x, y \in E$, $b(y, x) = \lambda^2 b(y, x)$. En déduire que $\lambda^2 = 1$. Conclure.