Licence ST - Année 2009/2010 - Semestre d'automne
UE Mathématiques, Math IV Algèbre

Feuille n° 5

Produit scalaire et espace euclidien

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel muni d'une forme quadratique q.

1. Montrer que si q est définie alors elle est non-dégénérée.
2. Montrer que la réciproque est fausse. On pourra construire un contre-exemple sur $\mathbf{k}^2$.

On rappelle qu'étant donné un espace vectoriel réel, un produit scalaire est la donnée d'une forme bilinéaire symétrique (ou quadratique) définie-positive. Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Exercice 2.

1. Sur $\mathbb{R}^n$ montrer que
$$< x, y >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$
définit un produit scalaire. On l'appelle le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit E un espace euclidien de dimension n. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que pour tous $x, y \in E$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ on ait :
$$< x, y >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Exercice 3. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E alors $E = F \oplus F^\perp$.

Exercice 4. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base d'un espace euclidien $(E, <, >)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est orthonormale si et s.si pour tout $x \in E$ la coordonnée de x selon b_i est $< x, b_i >$.

Exercice 5. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une famille d'un espace euclidien $(E, <, >)$ de dimension n. On suppose que pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$, $< b_i, b_j >= \delta_{ij}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale.

Exercice 6.

1. Soit E un espace vectoriel réel, muni d'une forme quadratique q positive. On notera b sa forme polaire. Montrer l'inégalité suivante (dite inégalité de Schwarz) :
$$b(x, y)^2 \leq q(x)q(y), \text{ pour tous } x, y \in E.$$
Supposons de plus que q est définie alors montrer l'équivalence :
$$b(x, y)^2 = q(x)q(y) \iff x \text{ et } y \text{ sont liés.}$$

2. Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $<,>$. Pour $x \in E$, on note $||x|| = \sqrt{<x,x>}$. Montrer que $||\cdot||$ est une norme, i.e.
   (a) pour $x \in E$, si $||x|| = 0$ alors $x = 0$,
   (b) pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$,
   (c) pour $x, y \in E$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (inégalité triangualaire).
3. Que vaut $||x||$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$.
4. Dans le plan réel, on considère un triangle ABC. On note a, b et c les longueurs des côtés respectifs BC, AC et AB et on note θ l'angle $\widehat{ACB}$. Montrer l'égalité suivante (dite de Al-Kashi (1380-1429), ou loi des cosinus) :
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\theta).$$
   En déduire le théorème de Pythagore ainsi que sa réciproque.

Exercice 7. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, avec $n = \dim E$. On appelle projecteur orthogonal sur F la projection p_F sur F selon la somme directe : $E = F \oplus F^\perp$, en d'autres termes, pour $x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$.

1. Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une base orthonormale de F. Montrer que pour tout $x \in E$,
$$p_F(x) = <x, v_1> v_1 + \dots + <x, v_p> v_p.$$
2. Soit $F = \text{Vect}(v)$ de dimension 1. Montrer que $p_F(x) := p_v(x) = \frac{<x,v>}{<v,v>} v$.
3. (Orthonormalisation de Gram-Schmidt)
   Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de E. On construit : $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2 - p_{u_1}(v_2)$, $u_3 = v_3 - p_{u_1}(v_3) - p_{u_2}(v_3)$, $\dots$, $u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} p_{u_j}(v_k)$, $\dots$.
   Enfin, on pose pour tout i, $e_i = \frac{u_i}{||u_i||}$. Montrer que les e_i forment une base orthonormale de E.
4. Appliquer ce procédé au cas de la base $\{1, X, X^2, X^3\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :
$$<P, Q> = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx.$$

Exercice 8. On se donne $v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (2, 1, 0)$ dans $\mathbb{R}^3$. Soit $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Calculer la matrice de p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Trouver une base orthonormale $\mathcal{B}$ pour laquelle la matrice de p_F soit la matrice diagonale $\text{Diag}(1, 1, 0)$.
3. Déterminer toutes les bases de E pour lesquelles la matrice de p_F est $\text{Diag}(1, 1, 0)$.