Licence ST - Année 2009/2010 - Semestre d'automne
UE Mathématiques, Math IV Algèbre

Feuille n° 4

Formes quadratiques

Note. Ici $\mathbf{k}$ désigne un corps commutatif de caractéristique 0.

Exercice 1. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $Q(E)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques sur E.

1. Quelle est la dimension de $Q(E)$? (Pensez en termes de matrices et à l'isomorphisme avec l'espace des formes bilinéaires symétriques.)

Soit $I = \{(i,j) \in \{1,2,3\}^2 \,|\, 1 \le i \le j \le 3\}$. Pour tout couple $(i,j) \in I$ on note q_{ij} l'application de E vers $\mathbb{R}$ défini par : $q_{ij}(x_1,x_2,x_3) = x_i x_j$.

2. Expliciter tous les q_{ij}. Combien y en a-t-il ?
3. Montrer que chacun des q_{ij} est une forme quadratique et que l'ensemble $\{q_{ij} \,|\, (i,j) \in I\}$ est une base de $Q(E)$.

Exercice 2. Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie. On définit sur $\mathbf{k}$ une relation :

$$\lambda \sim \lambda' \iff \exists \nu \in \mathbf{k} \setminus \{0\},\ \lambda = \nu^2 \cdot \lambda'.$$

1. Vérifier que $\sim$ définit une relation d'équivalence sur $\mathbf{k}$.
2. Expliciter $\mathbf{k}/\sim$ dans les cas suivants : $\mathbf{k} = \mathbb{R}$, $\mathbf{k} = \mathbb{C}$.

Pour toute forme quadratique q on définit $d(q) \in \mathbf{k}/\sim$ de la façon suivante : on choisit une base quelconque $\mathcal{B}$ de E et on définit $d(q)$ comme la classe de $\det(\mathrm{Mat}(q,\mathcal{B}))$ dans $\mathbf{k}/\sim$.

2. Montrer que $d(q)$ est bien définie (i.e. ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$).
3. Montrer que si q et q' sont deux formes quadratiques équivalentes alors $d(q) = d(q')$.
4. Montrer que si q et q' sont équivalentes alors $\mathrm{rang}(q) = \mathrm{rang}(q')$.
5. Donner deux formes quadratiques q et q' sur un espace de dimension 3 non équivalentes et telles que $d(q) = d(q')$. (On pourra penser à utiliser la question 4).

6. Donner deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ qui ont le même rang mais qui ne sont pas équivalentes (utilisez la question 3).

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur un corps $\mathbf{k}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Pour $x \in E$, on note $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{k}$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Soit q l'application de E vers $\mathbf{k}$ définie comme suit :
$q(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$.

1. Montrer que q est une forme quadratique en trouvant sa forme polaire.
2. Donner la matrice de q relativement à la base $\mathcal{B}$.
3. Utiliser l'orthogonalisation de Gauss pour trouver une base orthogonale en fonction de $\mathcal{B}$.

Exercice 4. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^4$. Soit q la forme quadratique donnée par

$$q(x, y, z, t) = 4(x - y + z + 2t)^2 - 5(y + 2z - t)^2 + 7(3z - t)^2.$$

1. Trouver une base dans laquelle la matrice de q est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(4, -5, 7, 0)$. On note $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ une telle base.
2. Soit $\mathcal{B}_2 = (\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}u_1, u_2 + u_4, \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}}u_3, u_4)$. Quelle est la matrice de q relativement à la base $\mathcal{B}_2$?
3. Que peut-on dire du vecteur u_4 ?
4. Trouver (à partir de $\mathcal{B}_1$) une base $\mathcal{B}_3$ pour laquelle la matrice de q est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, -1, 1, 0)$.
5. La base $\mathcal{B}_3$ est-elle la seule pour laquelle la matrice de q est $\mathrm{Diag}(1, -1, 1, 0)$ (à l'ordre près de ses éléments) ?

Exercice 5. Sur $\mathbb{R}^3$, donner la forme polaire, la matrice dans la base canonique, orthogonaliser (donner une base orthogonale et la matrice associée) et donner la signature des formes quadratiques suivantes :

1. $q(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 19z^2 - 8xy + 12xz - 18yz$.
2. $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 8z^2 - 4xy + 6xz - 10yz$.
3. $q(x, y, z) = 8xy - 16xz - 8yz$.

Exercice 6. Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On ne suppose pas E de dimension finie. On suppose q définie. Montrer que q est soit définie-positive soit définie-négative.

<u>Indication</u> On pourra raisonner par l'absurde comme suit : Soient u et v dans E tels que $q(u)q(v) < 0$. Étudier la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = q((1-t)u + tv)$ sur $[0, 1]$.