Licence ST - Année 2009/2010 - automne
UE Mathématiques, Math IV Algèbre

Feuille n° 3

Formes bilinéaires

Exercice 1 (Révisions)**.** Soit $\mathbf{k}$ un corps et n un entier supérieur à 0. Montrer que $(\mathbf{k}^n)^*$ est égal à l'espace vectoriel suivant :

$$\{w : \mathbf{k}^n \to \mathbf{k} \,|\, \exists (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{k}^n \text{ t.q. } w(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n\}.$$

Exercice 2 (Formes bilinéaires sur $\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m$)**.** Soit $\mathbf{k}$ un corps, n, m deux entiers positifs non nuls. Montrer que $\mathrm{Bil}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m)$ est égal à

$$\{b : \mathbf{k}^n \times \mathbf{k}^m \to \mathbf{k} \mid \exists b_{ij} \in \mathbf{k}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \text{ t.q.}$$

$$b((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_m)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_i y_j\}.$$

Exercice 3. Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finie et soient $u \in \mathrm{End}(E)$ et $v \in \mathrm{End}(F)$. Soit $b : E \times F \to \mathbf{k}$ une forme bilnéaire. On définit $b' : E \times F \to \mathbf{k}$ par $b'(x, y) = b(u(x), v(y))$. Soient $\mathcal{B} \subset E$ et $\mathcal{C} \subset F$ des bases. Relativement à ces dernières, déterminer la matrice de b' en fonction de celle de b.

Exercice 4 (Cours)**.** Soient E et F deux espaces vectoriels et $b : E \times F \to \mathbf{k}$ une forme bilinéaire. On a défini "b est non dégénérée" par "les applications δ et γ sont injectives". Rappelons que si $x \in E$ et $y \in F$ alors $\delta(y) = b(\cdot, y)$ et $\gamma(x) = b(x, \cdot)$.

Supposons E et F de dimension finie et b non dégénérée. Montrer que δ et γ sont bijectives et $\dim E = \dim F$.

Exercice 5. Soit $b : E \times E \to \mathbf{k}$ une forme bilinéaire.

1. Montrer que $(\mathrm{Id}_E)^*$ existe et égale Id_E.
2. Soient $u, v \in \mathrm{End}(E)$ tels que u^* et v^* existent. Soit $\lambda \in \mathbf{k}$. Montrer que $(\lambda u + v)^*$ existe et est égal à $\lambda u^* + v^*$.
3. Soient $u, v \in \mathrm{End}(E)$ tels que u^* et v^* existent. Montrer que $(u \circ v)^*$ existe et que $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
4. Soit u un endomorphisme de E. Montrer que si u est bijectif et que u et u^{-1} admettent un adjoint alors u^* est bijectif et on a $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

Exercice 6. Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension quelconque. À toute base $\mathcal{B}$ de E on associe l'application linéaire $\delta = \delta_{\mathcal{B}} : E \to E^*$ définie sur la base $\mathcal{B}$ comme suit : On note $\mathcal{B} = \{e_i, i \in I\}$, on pose alors $\delta(e_i) = e_i^*$.

1. δ est-elle injective ?
2. δ est-elle surjective ?

On définit maintenant $b = b_{\mathcal{B}} : E \times E \to \mathbf{k}$ comme suit : pour $(x, y) \in E^2$, on pose $b(x, y) = \delta(y)(x)$. (La notation $b_{\mathcal{B}}$ rappelle que b dépend de la donnée de la base $\mathcal{B}$.)

3. Montrer que b est bilinéaire.
4. b est-elle symétrique ?
5. Montrer que la base $\mathcal{B}$ est orthonormale.
6. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 2, 0), (1, -1, 2)\}$. Écrire la matrice de $b_{\mathcal{B}}$ dans la base canonique.

Exercice 7. Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas toujours d'adjoint.

Soit $E = \mathbb{R}[t]$.

0. Pourquoi E est-il isomorphe aux fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

Soit $b : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$b(p(t), q(t)) = \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

1. Montrer que b est bilinéaire symétrique et non dégénérée.

Soit u l'endomorphisme de E qui à $p \in E$ associe le polynôme constant

$$u(p) = \int_0^1 \frac{p(\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau.$$

2. Interlude d'analyse : Vérifier que cette intégrale converge.

On suppose maintenant *par l'absurde* que u admet un adjoint u^*. Écrivons $u^*(1) = \sum_{k=0}^{p} c_k t^k$.

3. Pour tout entier $n \geq 0$, calculer de deux façons différentes $b(u(t^n), 1)$.
4. Conclure en faisant intervenir les deux fractions rationnelles

$$S(X) = \frac{1}{X + 1/2} \qquad \text{et} \qquad T(X) = \sum_{k=0}^{p} \frac{c_k}{X + k + 1}.$$

Exercice 8. Soit E un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension n. Soit b une forme bilinéaire sur E. Soit $\mathcal{F}$ une famille de m vecteurs dans E.

Notons $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_m\}$, on définit la matrice de Gram de $\mathcal{F}$:

$$G(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} b(v_1, v_1) & \cdots & b(v_1, v_m) \\ \vdots & & \vdots \\ b(v_m, v_1) & \cdots & b(v_m, v_m) \end{pmatrix}$$

et on appelle déterminant de Gram de $\mathcal{F}$ son déterminant.

1. Montrer que si $\mathcal{F}$ est liée alors $\det G(\mathcal{F}) = 0$
2. Si b est non dégénérée, $\mathcal{F}$ est libre et $n = m$, montrer que $\det G(\mathcal{F}) \neq 0$.