Licence STS - Année 2009/2010 - Semestre 2
UE Mathématiques, Math IV Algèbre

Feuille n° 1

Espaces vectoriels quotients - Dualité

Sauf mention contraire, un corps est toujours supposé commutatif.

Quelques "révisions"

1. Soient E et E' des espaces vectoriels (sur un corps $\mathbf{k}$), et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Nous ne supposons pas que $\dim E$ est fini. Montrer qu'une application linéaire $f : E \to E'$ est uniquement définie à partir de la donnée de $\{f(x) | x \in \mathcal{B}\}$.
2. – Soient E et E' deux espaces vectoriels. Montrer que si $\dim E = \dim E'$ et que $\dim E$ est fini alors E et E' sont isomorphes.
   – Qu'en est-il si les dimensions de E et E' ne sont pas finies ? (Donnez d'abord un sens à l'égalité $\dim E = \dim E'$.)
   – Quel est alors votre avis sur ceci : "si F est un sous-espace vectoriel de E et que $\dim F = \dim E$ alors $F = E$" ?
3. Quelle est la dimension de l'espace $\mathrm{Hom}(E, E')$ des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de dimension finie ? Le démontrer.
4. – Soient deux matrices carrées A et B à coefficients dans un corps quelconque. Supposons que $AB = \mathrm{Id}$. A-t-on $AB = BA$?
   – Supposons que deux endomorphismes linéaires f et g d'un même espace vectoriel E satisfont $f \circ g = \mathrm{id}_E$, l'égalité $f \circ g = g \circ f$ est-elle vraie ? E n'est pas supposé être de dimension finie.

Espaces vectoriels quotients

Exercice 1. Considérons l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^2$ et F le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $(1, 2)$. Déterminer (de façon ensembliste) l'espace quotient E/F.

Exercice 2. Dans $E = \mathbb{R}^4$, soit $F = \mathrm{Vect}\{(1, 0, 0, -1), (1, 1, 0, 0)\}$. Donner deux supplémentaires de F dans E. En déduire deux bases de E/F. Combien existe-t-il de bases de E/F ? Même question pour les données de l'exercice précédent.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel (qu'on peut éventuellement supposé de dimension finie), F un sous-espace vectoriel de E et S un supplémentaire de F dans S. Soit $\mathcal{B}_S$ une base de S. Montrer que l'ensemble des classes $\bar{b}$ avec $b \in \mathcal{B}_S$ est une base de E/F.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subseteq G$. On suppose $\mathrm{codim}_E(F) = \mathrm{codim}_E(G)$ et $\mathrm{codim}_E(F) < +\infty$. Montrer que $F = G$.
Comment aurait-on pu conclure si $\dim E$ avait été finie ?

Exercice 5. Donner un exemple d'un quotient E/F d'espaces vectoriels tel que $\mathrm{codim}(F) < +\infty$ et $\dim(E)$ est infini. La dimension de F peut-elle être finie dans un tel cas ?
Donner un exemple dans lequel $\dim(F)$ et $\mathrm{codim}(F)$ ne sont pas finies.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et π la surjection canonique $\pi : E \to E/F$. Soit G un espace vectoriel et $f : E \to G$ une application linéaire. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- Il existe une application linéaire $\tilde{f} : E/F \to G$ telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$.
- F est inclus dans $\ker f$.

Montrer (sous ces conditions) l'unicité de $\tilde{f}$, c'est-à-dire : Si $f' : E/F \to G$ est une autre application linéaire satisfaisant la condition $f = f' \circ \pi$ alors $f' = \tilde{f}$.

Dualité

Exercice 7. Utiliser l'exercice précédent pour montrer que $(E/F)^*$ est canoniquement isomorphe à l'annulateur de F dans E^*.

Exercice 8. Soit $u : E \to G$ un morphisme linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que $\mathrm{ann}(\mathrm{Im}(u)) = \ker({}^t u)$. En déduire que $\mathrm{rang}(u) = \mathrm{rang}({}^t u)$.

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel de dimension *infinie*, et soit $\mathcal{B} = \{e_i, i \in I\}$ une base (I est un ensemble d'indexation, il est infini par hypothèse). Pour chaque e_i, on définit $e_i^* \in E^*$ par les relations : $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ pour tout $i, j \in I$, où δ_{ij} vaut 1 si $i = j$ et vaut 0 sinon. Nous savons (cf. le cours) que la famille des e_i^* est libre dans E^*. Ici le but est de montrer qu'elle n'est pas génératrice.

Soit $w \in E^*$ défini sur la base $\mathcal{B}$ par : $w(e_i) = 1$ pour tout $i \in I$. Montrer que $w \notin \mathrm{Vect}\{e_i^*, i \in I\}$.

Exercice 10. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles de longueur finie (i.e. E est l'ensemble des suites $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que tous les u_k sauf un nombre fini sont nuls).
- Donner une base de E.
- Montrer que E^* est isomorphe à l'espace vectoriel des suites réelles.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On se donne une base $\mathcal{B}$ de E et on note $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{B}^{**}$ les bases duales (dans E^*) et biduale (dans E^{**}) respectivement.

- Déterminer la matrice de l'isomorphisme canonique $\Phi : E \to E^{**}$ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^{**}$.
- Que peut-on en conclure concernant les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ et ceux de $\Phi(x)$ relativement à ces bases ?

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension n, ayant un sous-espace vectoriel F de dimension m. Quelle est la dimension de l'espace Φ des formes linéaires de E^* qui s'annulent sur F ? Quels sont les vecteurs de E qui annulent toutes les formes de Φ ? Combien au minimum faut-il d'équations linéaires pour définir F ?

Exercice 13. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ trois formes linéaires définies par

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y, z) &= 2x - y + 3z, \\
\varphi_2(x, y, z) &= 3x - 4y + 2z, \\
\varphi_3(x, y, z) &= 4x - 7y + z.
\end{aligned}$$

1. La famille $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ est-elle une base de $(\mathbb{R}^3)^*$?
2. Déterminer l'annulateur $\mathrm{ann}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$.

Exercice 14. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ trois formes linéaires définies par

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y, z) &= x + 2y + z,\\ \varphi_2(x, y, z) &= 2x + 3y + 3z,\\ \varphi_3(x, y, z) &= 3x + 7y + z.\end{aligned}$$

1. Montrer que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ forme une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
2. Déterminer la base duale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

Exercice 15. Soient (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et (e_1^*, e_2^*, e_3^*) sa base duale. Soient $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^* \in (\mathbb{R}^3)^*$ définis par :

$$\begin{aligned}\varphi_1^* &= 2e_1^* + e_2^* + e_3^*,\\ \varphi_2^* &= -e_1^* + 2e_3^*,\\ \varphi_3^* &= e_1^* + 3e_2^*.\end{aligned}$$

1. Montrer que la famille $(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*)$ forme une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
2. Déterminer la base antéduale de $(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*)$.

Exercice 16. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 2, -3, 1, -1)$, $v_2 = (1, 3, -4, 0, 1)$, $v_3 = (2, 5, -7, 1, 0)$. En déterminant l'annulateur de F, écrire un système d'équations linéaires dont l'ensemble des solutions est l'espace vectoriel F.

Exercice 17. Soit $\mathbb{R}_2[t]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes d'indéterminée t et de degré inférieur ou égal à 2. On considère $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}_2[t]$ tels que $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = 1 + t$ et $p_2(t) = (1 + t)^2$.
1. Montrer que la famille (p_0, p_1, p_2) forme une base de $\mathbb{R}_2[t]$ et déterminer sa base duale.
2. Pour tout $p \in \mathbb{R}_2[t]$, on note φ_p la forme linaire sur $\mathbb{R}_2[t]$ définie par : $\varphi_p(q) = \int_0^1 p(t)q(t)dt$, pour tout $q \in \mathbb{R}_2[t]$.
Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{R}_2[t] \to (\mathbb{R}_2[t])^*$ définie par $\Phi(p) = \varphi_p$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
3. Déterminer l'annulateur du sous-espace vectoriel engendré par $\{p_0, p_1\}$.